

**Exercice 1:** (6 points)

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 6x - 2$ .

- Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- En déduire l'existence d'un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .
- Vérifier que  $0,327 < \alpha < 0,328$ .

On se propose dans la suite de déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .

- Vérifier que les nombres  $a_1 = -\sqrt[3]{2}$ ,  $a_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $a_3 = \sqrt[3]{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$  sont les racines cubiques de  $-2$ .
  - Vérifier que les nombres  $b_1 = \sqrt[3]{4}$ ,  $b_2 = \sqrt[3]{4} e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $b_3 = \sqrt[3]{4} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  sont les racines cubiques de  $4$ .
  - Vérifier que  $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$ .
- Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes tels que  $a^3 + b^3 = 2$  et  $ab = -2$ .
  - Montrer que  $(a + b)$  est une solution, dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation  $z^3 + 6z - 2 = 0$ .
  - Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^3 + 6z - 2 = 0$ .
  - Déterminer alors la valeur exacte de  $\alpha$ .

**Exercice 2:** (6 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et on munit l'espace du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

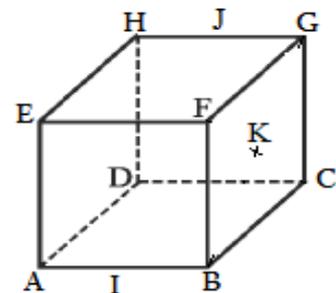
On note I et J les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[GH]$  et on désigne par K le centre du carré BCGF.

1) a) Vérifier que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal au plan (DFI).

- En déduire une équation cartésienne du plan (DFI).
- Calculer la distance du point E au plan (DFI).

2) a) Montrer que le quadrilatère DJFI est un losange.

- Montrer que l'aire du losange DJFI est égale à  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .
- Calculer le volume de la pyramide EDJFI.



3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par E et orthogonale au plan (DFI).

- Vérifier que K est un point de  $(\Delta)$ .
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de  $(\Delta)$  et du plan (DFI).

4) Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$ .

- Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
- Montrer que (S) est tangente au plan (DFI) et préciser leur point de contact.

### Exercice 3: (8 points)

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement les résultats.

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) En déduire que, pour tout réel  $t$  de  $[0, +\infty[$ , on a  $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$ .

d) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

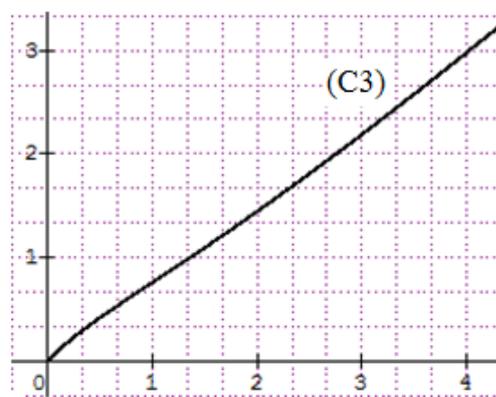
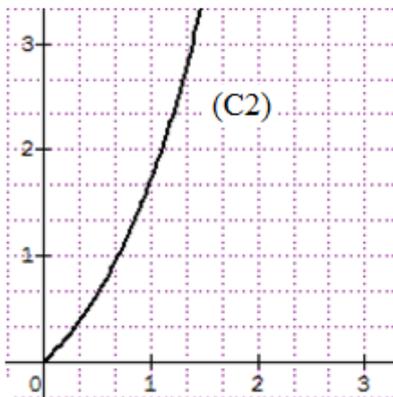
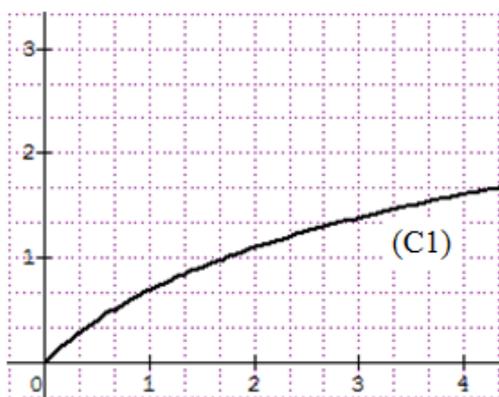
2) Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule en 0.

a) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ , on a  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ .

b) En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $F$ .

d) Parmi les trois courbes ci-dessous, prouver que seule la courbe  $(C_3)$  est susceptible de représenter  $F$ .



3) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $F(x) = n$  admet une solution unique  $x_n$  dans  $[0, +\infty[$ .

b) Montrer que la suite  $(x_n)$  est croissante et déterminer sa limite.

4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = 2 + F(x^2)$ .

On note  $(C_g)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $g$  est dérivable à droite en 0.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats.

c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

d) Tracer la courbe  $(C_g)$ .

